State space model (SSM)

Р. Махаммадиев, У. Джуманазаров, Ш. Маҳмудов,
С. Абдуғаниев

Аннотация

Ушбу мақолада кузатиладиган (observable variables) ва мавҳум ўзгарувчиларнинг (unobservable variables) ўзаро боғлиқлик даражасини ифодаловчи тенгламалардан ташкил топган state space model (SSM) модели ёритилган. Хусусан, ўзгарувчилар ўртасидаги боғлиқликларни ифодаловчи номаълум коэффициентлар Калман фильтридан фойдаланган ҳолда максимал эҳтимоллик орқали (maximum likelihood) баҳоланади. Мазкур мақола халқаро тажрибаларни ўрганган ҳолда кўчмас мулк бозори ҳолатини тўлақонли таҳлил қилиш учун уй-жой нархларининг фундаментал қийматини аниқлаш бўйича қўшимча моделдан фойдаланиш имкониятларини баҳолаш мақсадида тайёрланган.

Таянч сўзлар: Байес теоремаси, Калман фильтри, ковариация матрицаси, максимал эҳтимоллик, зичлик функцияси.

State space model (SSM)

State space model (SSM)[1] ўзгарувчилар ўртасидаги чизиқли боғлиқлик функциясини аниқлаш орқали эрксиз ўзгарувчи қийматини назарий баҳолашга хизмат қилади. Ушбу модел кузатиладиган (observable variables) ва мавҳум ўзгарувчиларнинг (unobservable variables) ўзаро боғлиқлик даражасини ифодаловчи кузатиш тенгламаси (observable or measurement equation) ҳамда динамик ҳолат ўзгарувчиларини ифодаловчи ўтиш тенгламасидан (transition equation) ташкил топади:

$$y_t = H_t z_t + G_t x_t + v_t$$
$$z_t = B_{t-1} z_{t-1} + F_{t-1} x_{t-1} + w_{t-1}$$

Бу ерда, y_t – кузатилиши мумкин бўлган эрксиз ўзгарувчилар вектори, x_t – кузатилиши мумкин бўлган эркли ўзгарувчилар вектори, z_t – мавҳум ўзгарувчилар вектори, v_t – кузатиш тенгламаси учун нисбий хатолик вектори, w_t – ўтиш тенгламаси учун нисбий хатолик вектори, H_t, G_t, B_t, F_t – номаълум коэффициентлар матрицалари.

Ушбу моделдаги эркли, эрксиз ва мавҳум ўзгарувчилар ўртасидаги боғлиқликларни ифодаловчи номаълум коэффициентлар Калман фильтридан фойдаланган ҳолда максимал эҳтимоллик орқали (maximum likelihood) баҳоланади.

Калман фильтри

Калман фильтри математик алгоритм бўлиб, номаълум мавҳум ўзгарувчиларни кузатиш имкони бўлган ўзгарувчилар билан рекурсив баҳолаш имконини беради. Бунда, Калман фильтри орқали ҳар бир t давр учун шу давргача бўлган маълумотларга боғлиқ бўлган шартли кутилаётган мавҳум ўзгарувчилар $z_{t|t}$ вектори ва шартли ковариация матрицаси $\Omega_{t|t}$ қийматлари аниқланади.

Калман фильтри рекурсияларини ифодалашда қуйидаги қўшимча белгилардан фойдаланади:

$$z_{t|s} \coloneqq E(\, z_t |\, y_1, \dots, y_s),$$
$$\textstyle\sum_z(t|s) \coloneqq Cov(\, z_t |\, y_1, \dots, y_s),$$

[1] Lütkepohl, H. (2005). New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer Science & Business Media.

$$y_{t|s} \coloneqq E(\, y_t |\, y_1, \dots, y_s),$$
$$\textstyle\sum_y(t|s) \coloneqq Cov(\, y_t |\, y_1, \dots, y_s),$$
$$(z|y) \sim N(\mu, \textstyle\sum).$$

Белгиланган шартлар асосида ўзгарувчиларнинг нормал тақсимланганлик фарази илгари сурилади:

$$(\, z_t |\, y_1, \dots, y_{t-1}) \sim N(\, z_{t|t-1}, \textstyle\sum_z(t|t-1)),\ t =\ 2, \dots, T$$
$$(\, z_t |\, y_1, \dots, y_t) \sim N(\, z_{t|t}, \textstyle\sum_z(t|t)),\ t =\ 1, \dots, T$$
$$(\, y_t |\, y_1, \dots, y_{t-1}) \sim N(\, y_{t|t-1}, \textstyle\sum_y(t|t-1)),\ t =\ 2, \dots, T$$
$$(\, z_t |\, y_1, \dots, y_T) \sim N(\, z_{t|T}, \textstyle\sum_z(t|T))$$
$$(\, y_t |\, y_1, \dots, y_T) \sim N(\, y_{t|T}, \textstyle\sum_y(t|T)),\ t >\ T.$$

Мавҳум ўзгарувчилар ва ковариация матрицалари Калман фильтри ишга туширилгандан сўнг баҳолаш, тузатиш ва прогнозлаштириш босқичлари орқали аниқланади.

Мавҳум ўзгарувчилар ва ковариация матрицаларининг дастлабки қийматларини киритиш орқали Калман фильтри ишга туширилади:

$$z_{0|0} \coloneqq \mu_0\ ,\ \textstyle\sum_z\ (0|0) \coloneqq \sum_0$$

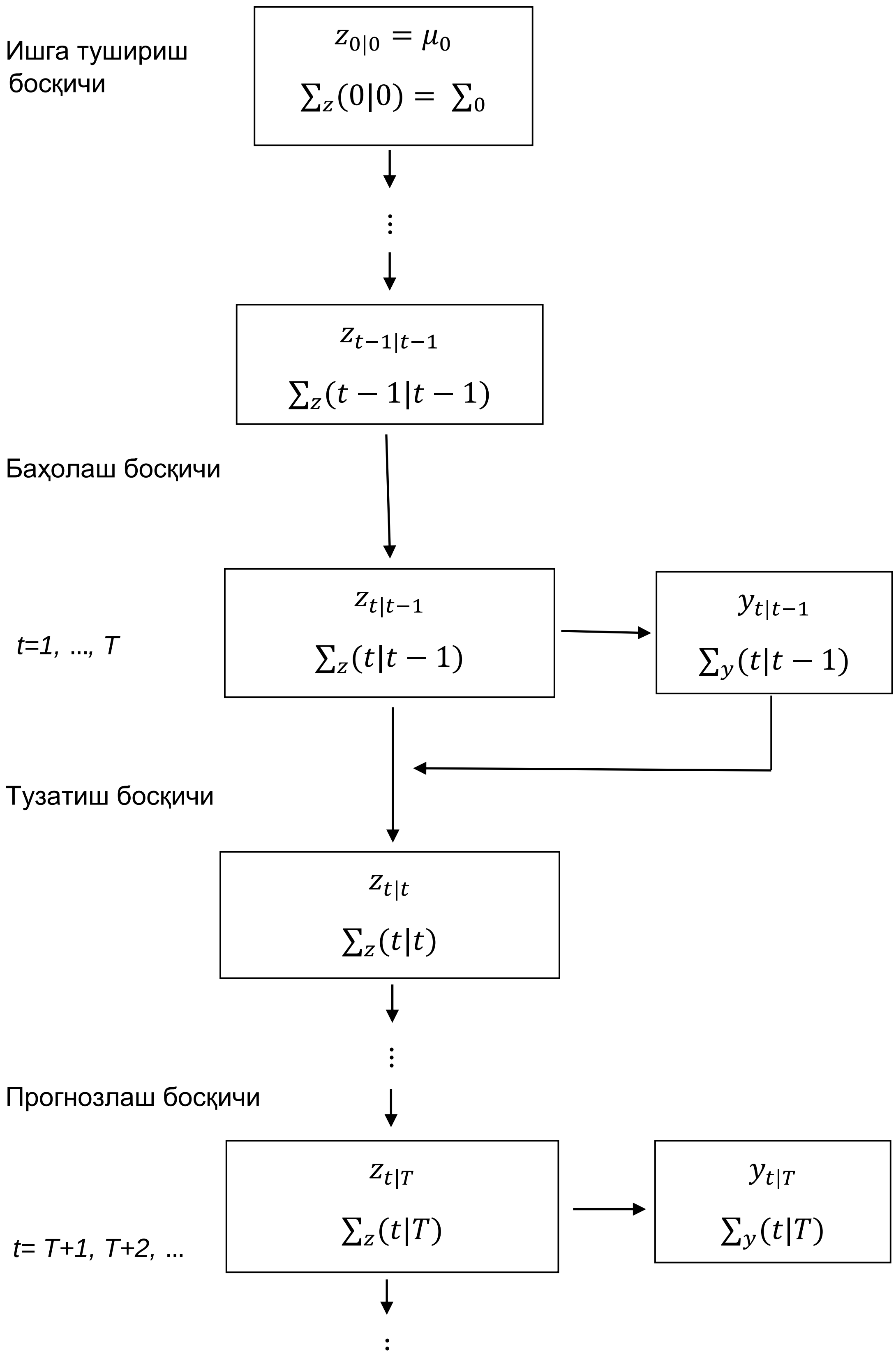
Калман фильтрининг баҳолаш босқичи $(1 \leq t \leq\ T)$:

$$z_{t|t-1} = \mathrm{B} z_{t-1|t-1} + \mathrm{F} x_{t-1},$$
$$\textstyle\sum_z(t|t-1) = \mathrm{B} \sum_z(t-1|t-1)\mathrm{B}' + \sum_w,$$
$$y_{t|t-1} = \mathrm{H}_t\, z_{t|t-1} + \mathrm{G} x_t,$$
$$\textstyle\sum_y(t|t-1) = \mathrm{H}_t \sum_z(t|t-1){\mathrm{H}'}_t + \sum_v.$$

Калман фильтрининг тузатиш босқичи $(1 \leq t \leq\ T)$:

$$z_{t|t} =\ z_{t|t-1} + \mathrm{P}_t(y_t -\ y_{t|t-1}),$$
$$\textstyle\sum_z(t|t) = \sum_z(t|t-1) - \mathrm{P}_t\ \sum_y(t|t-1){\mathrm{P}'}_t,$$
$$\mathrm{P}_t \coloneqq \textstyle\sum_z(t|t-1){\mathrm{H}'}_t \sum_y(t|t-1)^{-1}.$$

-чизма. Калман фильтри алгоритми



Манба: Lütkepohl, H. (2005). New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer Science & Business Media.

Калман фильтри ишга туширилгандан сўнг $t = 1$ давр учун баҳолаш ва тузатиш босқичлари амалга оширилади. Кейинги даврлар учун ҳам баҳолаш ва тузатиш босқичлари кетма-кет такрорланади.

Калман фильтрининг сўнгги прогнозлаштириш босқичи $t > T$:

$$z_{t|T} = \mathrm{B}z_{t-1|T} + \mathrm{F}x_{t-1},$$
$$\textstyle\sum_z(t|T) = \mathrm{B}\sum_z(t-1|T)\mathrm{B}' + \sum_w,$$
$$y_{t|T} = \mathrm{H}_t\, z_{t|T} + \mathrm{G}x_t,$$
$$\textstyle\sum_y(t|T) = \mathrm{H}_t \sum_z(t|T)\mathrm{H}'_t + \sum_v.$$

Прогнозлаштириш босқичи $t = T+1, T+2, \ldots$ учун рекурсив равишда амалга оширилиши мумкин.

Калман фильтри босқичларида фойдаланилган номаълум параметрлар векторлари максимал эҳтимоллик функцияси (maximum likelihood function) ёрдамида баҳоланади.

Максимал эҳтимолликни баҳолаш (Maximum likelihood estimation)

Номаълум параметрлардан ташкил топган $\delta(B, F, G, H_t, \sum_w, \sum_v, \sum_0, \mu_0)$ вақт бўйича ўзгармас вектори ягона аниқланган ҳамда элементлари бўйича камида икки марта дифференциалланувчи ҳисобланади.

Номаълум параметрларни аниқлаш учун дастлаб логарифмик эҳтимоллик функцияси (log-likelihood function) яратилиб, ушбу функциянинг максимал қиймати баҳоланади.

Байес теоремасига кўра умумий кўринишдаги зичлик функцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned} f(y_1, \ldots, y_T; \delta) &= f(y_1; \delta) f(y_2, \ldots, y_T | y_1; \delta) \\ &\vdots \\ &= f(y_1; \delta)\, f(y_1|y_2; \delta)\, \cdots\, f(y_T | y_1, \ldots, y_{T-1}; \delta). \end{aligned}$$

Шунингдек, K ўлчовли y_t учун Гаусс логарифмик эҳтимоллик функцияси зичлик функциялари кўпайтмасининг логарифмланган қиймати орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\ln l\,(\delta | y_1, \ldots, y_T) = \ln f(y_1, \ldots, y_T; \delta)$$

$$= \ln f(y_1;\delta) + \sum_{t=2}^{T} \ln f(y_t|y_1, \dots, y_{t-1};\delta)$$
$$= -\frac{KT}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln|\,\Sigma_y(t|t-1)|$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - y_{t|t-1}\right)' \Sigma_y(t|t-1)^{-1}\left(y_t - y_{t|t-1}\right)$$

Ушбу логарифмик эҳтимоллик функциясида бошланғич қийматлар сифатида қуйидагилардан фойдаланилади:

$$y_{1|0} \coloneqq E(y_1)$$
$$\Sigma_y(1|0) \coloneqq Cov(y_1)$$
$$(y_t|y_1, \dots, y_{t-1}) \sim \mathcal{N}\left(y_{t|t-1}, \Sigma_y(t|t-1)\right)$$
$$t = 1, \dots, T$$

Номаълум параметрлар бўйича δ векторни аниқлагандан сўнг логарифмик эҳтимоллик функциядаги барча ўзгарувчилар Калман фильтри рекурсив алгоритми орқали баҳоланади.

Логарифмик эҳтимоллик функцияси кўринишини соддалаштириш учун қуйидаги белгилашлар киритилади:

$$e_t(\delta) \coloneqq y_t - y_{t|t-1}$$
$$\Sigma_t(\delta) \coloneqq \Sigma_y(t|t-1)$$

Киритилган белгилашлар орқали логарифмик эҳтимоллик функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$ln\, l\,(\delta) = -\frac{KT}{2}\, ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}[ln|\Sigma_t(\delta)| + e_t(\delta)'\Sigma_t(\delta)^{-1}e_t(\delta)]$$

Логарифмик эҳтимоллик функциясини максимал қийматларидаги номаълум параметрларни баҳолашнинг турли усуллари мавжуд. Жумладан, номаълум параметрларга нисбатан хусусий ҳосилалар олиб нолга тенглаш орқали логарифмик эҳтимолликни максималлаштирувчи параметрлар қийматлари аниқланиши мумкин.